Metode numerice pentru ecuația Landau Lifshitz Gilbert

Sesiunea de comunicări ştiinţifice ale studenţilor, Bucureşti, 13 mai 2011

Autori:

Alexandru CHIRIȚĂ, fac. Automatică şi Calculatoare, gr. 312 AC, anul I

Iulia RĂDULESCU, fac. Automatică şi Calculatoare, gr. 312 AC, anul I

Ing. Daniel DAN, fac. De Ing. Electrică, Masterat NANO, Anul II

Coordonatori ştiinţifici:
Conf. Dr. Ing. Gabriela CIUPRINA
Prof. Dr. Ing. Daniel IOAN

CUPRINS

- Precesia giromagnetică
- Formularea problemei
- Abordarea numerică
- Metoda Euler explicită
- Metoda Runge Kutta 4
- Bibliografie

I. Precesia giromagnetică

- Deducerea ecuației modelului giromagnetic continuu:

$$\boxed{\vec{\mu} = -\gamma \vec{L}} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{H}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{\mu} \times \vec{H}} \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{g\left|e\right|}{2m_e c} = 2,21 \cdot 10^5 \text{ m/A} \cdot \text{s} \quad (4)$$

$\vec{\mu}$ - momentul magnetic

$\gamma > 0$ - constanta giromagnetică

$\vec{L}$ - momentul cinetic

g - factorul Landé

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ - sarcina electronului

$$\boxed{\vec{M} = \vec{M}\left(\vec{r}\right) = \frac{\sum_{j}^{N} \vec{\mu}_j}{dV_{\vec{r}}}} \quad (5)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{\mu} \times \vec{H}} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{dV_{\vec{r}}} \frac{d\sum_{j}^{N} \vec{\mu}_j}{dt} = -\gamma \frac{\sum_{j}^{N} \vec{\mu}_j}{dV_{\vec{r}}} \times \vec{H}} \quad (6)$$

$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ Kg - masa electronului

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s - viteza luminii în vid

$\vec{H}$ - câmpul magnetic

$dV_{\vec{r}}$ - unitatea de volum

$\vec{M}$ - magnetizația

Modelul continuu al precesiei giromagnetice:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H}} \quad (7)$$

I. Precesia giromagnetică

Ecuația Landau-Lifshitz Gilbert

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t} = -\gamma \overrightarrow{M} \times \overrightarrow{H}_{ef};} \quad (8) \quad \boxed{a) \quad \mu_0 M_s \vec{m} \times \overrightarrow{H}_{ef} = 0; \quad b) \quad \left.\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0;}$$

$$\boxed{\overrightarrow{H}_{ef} = \frac{2}{\mu_0 M_s} \nabla\left(A \nabla \vec{m}\right) - \frac{1}{\mu_0 M_s} \frac{\partial f_{ani}}{\partial \vec{m}} + \overrightarrow{H}_m + \overrightarrow{H}_a.} \quad (9)$$

$$\overrightarrow{H}_{ex} = \frac{2}{\mu_0 M_s} \nabla\left(A \nabla \vec{m}\right); \quad \overrightarrow{H}_{ani} = \frac{1}{\mu_0 M_s} \frac{\partial f_{ani}}{\partial \vec{m}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t} = -\gamma \overrightarrow{M} \times \overrightarrow{H}_{ef} - \frac{\lambda}{M_s} \overrightarrow{M} \times \left(\overrightarrow{M} \times \overrightarrow{H}_{ef}\right).} \quad (10)$$

$\lambda > 0$ - constantă fenomenologică (caracteristica de material).

γ - constanta giromagnetică.

$\overrightarrow{M}$ - magnetizația.

$\overrightarrow{H}_{ef}$ - câmpul magnetic efectiv.

n - normala la suprafața corpului

II. Formularea problemei

•Fie ecuația LLG ce descrie evoluția în timp a magnetizării într-un material feromagnetic de forma:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = \gamma M_s \vec{m} \times \vec{h}_{ef}(\vec{m},t) + \gamma M_s \vec{m} \times \left(\vec{m} \times \vec{h}_{ef}(\vec{m},t)\right), \quad (11)$$

$$\text{pe } \Omega \times (0,T); \quad \vec{m} = \vec{M} / M_s, \vec{h}_{ef} = \vec{H}_{ef} / M_s$$

$\vec{h}_{ef}(\vec{m},t) = -\dfrac{\delta g}{\delta \vec{m}} = \vec{h}_{ex} + \vec{h}_m + \vec{h}_{an} + \vec{h}_a(t)$ - câmpul efectiv;

$\vec{h}_{ex} = \dfrac{A}{\mu_0 M_s^2}\left(\nabla^2 \vec{m}\right)$, - câmpul de schimb; γ-ct. giromagnetica

$\vec{h}_m = -\dfrac{1}{4\pi}\nabla \int_\Omega \nabla' \left(\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \cdot \vec{m}(\vec{r}\,')\, dV_{\vec{r}\,'}$, câmpul magnetostatic

$\vec{h}_{an} = \dfrac{K_1}{\mu_0 M_s^2}\vec{e}_{an}(\vec{r})\left(\vec{e}_{an}(\vec{r}) \cdot \vec{m}(\vec{r})\right)$, - câmpul de anizotropie

$A -$ constanta de schimb; $\mathrm{K}_1 -$ constanta de anizotropie;

$K_1 -$ constanta de anizotropie unuaxială; $\vec{e}$ - versorul axei uşoare;

III. Abordarea numerică pentru ecuația LLG unidimensională

- Fie ecuația LLG:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = \vec{m} \times \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial x^2} - \alpha \vec{m} \times \left(\vec{m} \times \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial x^2} = \Delta \vec{m}. \quad (12)$$

- Unde $\vec{m} : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^3$ şi

$$\Omega = [a, b] = [-1, 1], \quad T = 1.$$

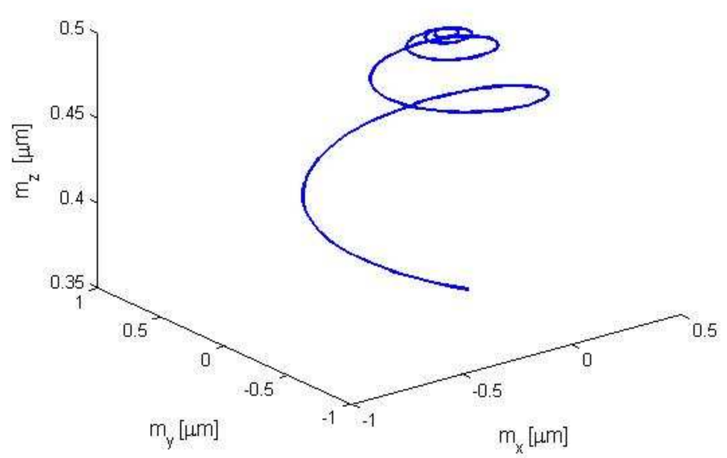
- Cu soluția analitică:

$$m_x = \frac{\sin\beta \cos[k \cdot x - \phi(x,t;\beta,k,\alpha)]}{d(t;\beta,k,\alpha)}, \quad \phi(x,t;\beta,k,\alpha) = \frac{\frac{1}{\alpha}\log\left(d + e^{k^2 \alpha t}\cos\beta\right)}{1+\cos\beta},$$

$$m_y = \frac{\sin\beta \sin[k \cdot x - \phi(x,t;\beta,k,\alpha)]}{d(t;\beta,k,\alpha)}, \quad d(t;\beta,k,\alpha) = \sqrt{\sin^2\beta + e^{k^2 \alpha t}\cos\beta},$$

$$m_z = \frac{\exp(k^2 \alpha \cdot t)\cos\beta}{d(t;\beta,k,\alpha)}, \qquad k = l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

Miscarea de precesie si atenuare a vectorului moment magnetic



IV. Abordare numerică. Metoda Euler explicită

- O schemă de tip Euler explicit se obține după discretizarea ecuației LLG:

$$\frac{\vec{m}_i^{j+1}-\vec{m}_i^{j}}{\Delta t}=\vec{m}_i^{j}\times\frac{\vec{m}_{i+1}^{j}-2\vec{m}_i^{j}+\vec{m}_{i-1}^{j}}{(\Delta x)^2}-\alpha\vec{m}_i^{j}\times\left(\vec{m}_i^{j}\times\frac{\vec{m}_{i+1}^{j}-2\vec{m}_i^{j}+\vec{m}_{i-1}^{j}}{(\Delta x)^2}\right) \quad (13)$$

- Notând $h=\Delta t/(\Delta x)^2$ discretizarea LLG devine:

$$m_{x,i}^{j+1}=m_{x,i}^{j}+hG_1(m_{x,i}^{j},m_{y,i}^{j},m_{z,i}^{j},t_j)$$

$$m_{y,i}^{j+1}=m_{y,i}^{j}+hG_2(m_{x,i}^{j},m_{y,i}^{j},m_{z,i}^{j},t_j)$$

$$m_{z,i}^{j+1}=m_{z,i}^{j}+hG_3(m_{x,i}^{j},m_{y,i}^{j},m_{z,i}^{j},t_j)$$

$$G_1(m_{x,i}^{j},m_{y,i}^{j},m_{z,i}^{j},t_j)=F_1-\alpha(m_{y,i}^{j}F_3-m_{z,i}^{j}F_2)$$

$$G_2(m_{x,i}^{j},m_{y,i}^{j},m_{z,i}^{j},t_j)=F_2-\alpha(m_{y,i}^{j}F_1-m_{z,i}^{j}F_3)$$

$$G_3(m_{x,i}^{j},m_{y,i}^{j},m_{z,i}^{j},t_j)=F_3-\alpha(m_{y,i}^{j}F_2-m_{z,i}^{j}F_1)$$

$$F_1\left(m_{y,i}^{j},m_{z,i}^{j},t_j\right)=m_{y,i}^{j}h_{z,i}^{j}-m_{z,i}^{j}h_{y,i}^{j};$$

$$F_2\left(m_{z,i}^{j},m_{x,i}^{j},t_j\right)=m_{z,i}^{j}h_{x,i}^{j}-m_{x,i}^{j}h_{z,i}^{j};$$

$$F_3\left(m_{y,i}^{j},m_{z,i}^{j},t_j\right)=m_{x,i}^{j}h_{y,i}^{j}-m_{y,i}^{j}h_{x,i}^{j};$$

$$h_{x,i}^{j}=m_{x,i+1}^{j}-2m_{x,i}^{j}+m_{x,i-1}^{j};$$

$$h_{y,i}^{j}=m_{y,i+1}^{j}-2m_{y,i}^{j}+m_{y,i-1}^{j};$$

$$h_{z,i}^{j}=m_{z,i+1}^{j}-2m_{z,i}^{j}+m_{z,i-1}^{j}.$$

V. Abordare numerică. Metoda Runge-Kutta de ordin 4 (RK4)

- Având aproximarea $\vec{m}_j^i$ la timpul t_j, rezultă:

$$\vec{K}_1 = \vec{G}\left(\vec{m}_i^j, t_j\right), \qquad \vec{m}_i^{j+1} = \vec{m}_i^j + \frac{h}{6}\left(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4\right) \quad (14)$$

$$\vec{K}_2 = \vec{G}\left(\vec{m}_i^j + \frac{h}{2}\vec{K}_1, t_j + \frac{h}{2}\right),$$

$$\vec{K}_3 = \vec{G}\left(\vec{m}_i^j + \frac{h}{2}\vec{K}_2, t_j + \frac{h}{2}\right),$$

$$\vec{K}_4 = \vec{G}\left(\vec{m}_i^j + h\vec{K}_3, t_j + h\right).$$

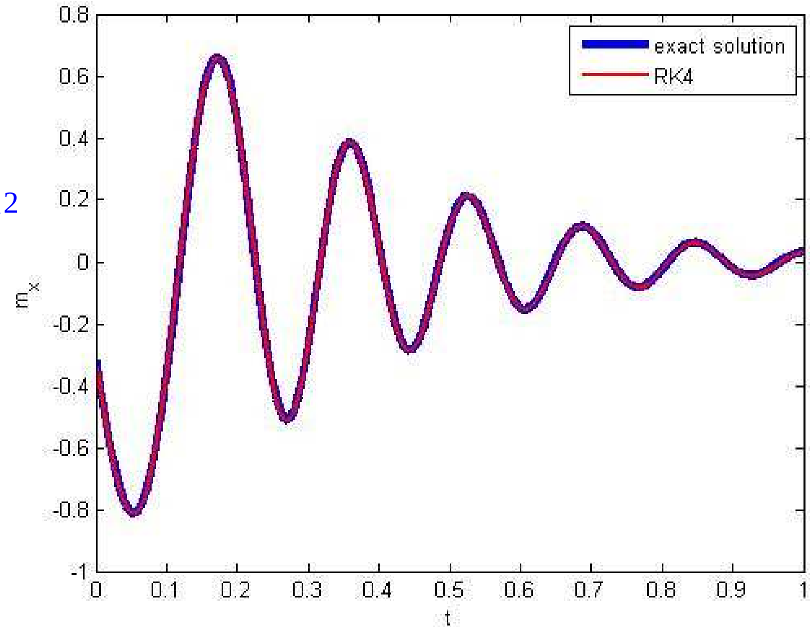
$$\vec{K}_n = \left[K_{n1}, K_{n2}, K_{n3}\right]^T, n = 1,2,3,4.$$

$$\Delta x = 0.01$$

$$\Delta t = 10^{-4}$$

$$h = \Delta t / \Delta x^2$$

Evoluția în timp a componentei mx



V. Abordare numerică. Metoda Runge-Kutta de ordin 4 (RK4)

- În cele două grafice se arată evoluția în timp şi spațiu a componentei m_x a vectorului $\vec{m}$

Fig. 2 – Soluția obținută cu RK4

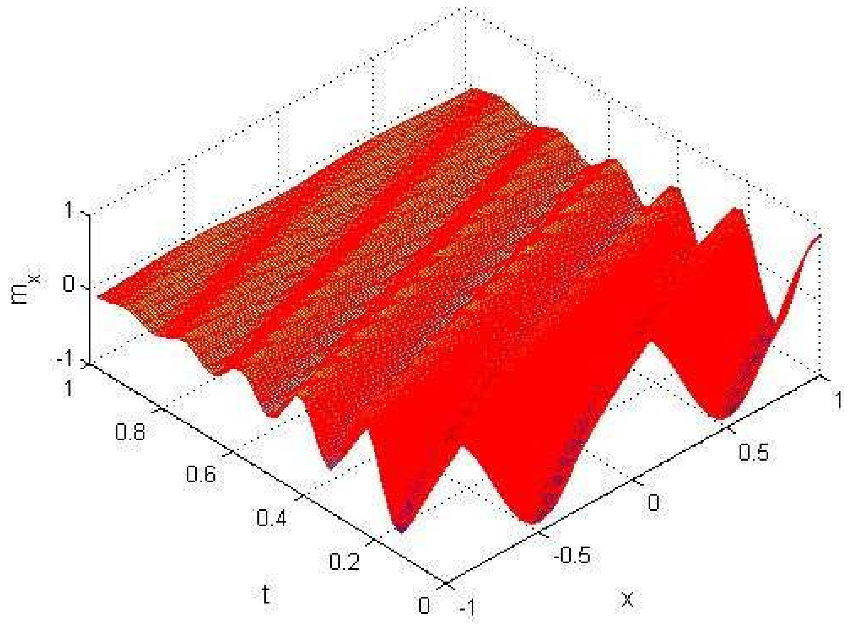
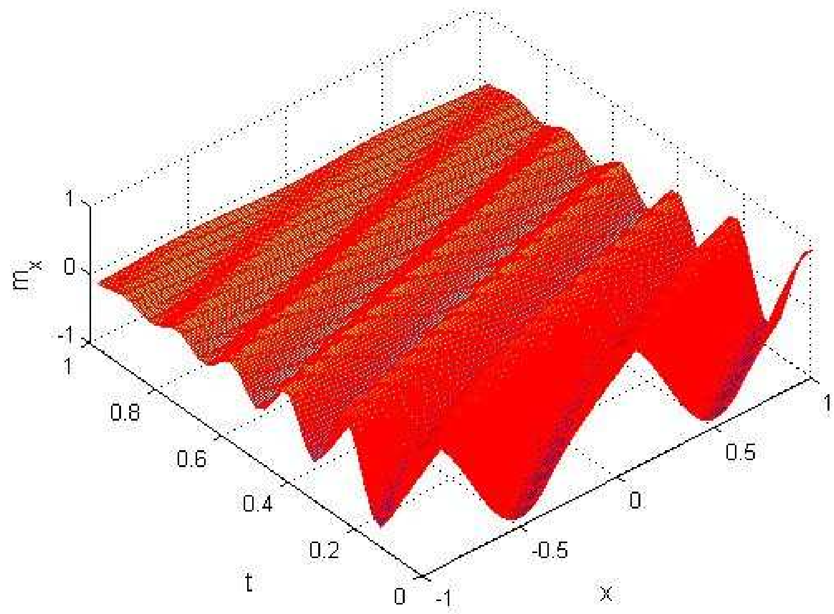


Fig. 3 – Soluția analitică



VI. Concluzii

- Schema în diferențe finite poate fi aplicată întregii ecuații LLG (adică şi atunci când coeficientul de amortizare este diferit de zero) atunci când se necesită discretizarea ei.
- Din studiul efectuat reiese că metoda RK4 explicită poate fi utilizată pentru rezolvarea numerică a ecuației LLG şi atunci când coeficientul de amortizare Gilbert este diferit de zero.
- Coeficientul Gilbert nu afectează stabilitatea metodei RK4 explicită.

Bibliografie

[1] D. Dan, S. Malureanu, “Modelling of the magnetization process based on the Landau - Lifshitz - Gilbert equation”, ATEE, 2011, Bucharest.

[2] F.Ciubotaru, A.stancu and L.Stoleriu,”LLG study of the precessional switching process in pulsed magnetic fields”, Journal of Optoelectronics and Advanced materials, vol.6, nr. 3, p.1017 – 1021, 2004.

[3] W.F.B. Jr., Micromagnetics. Interscience Publishers, 1963.

[4] M. d’Aquino, “Nonlinear magnetization dynamics in thin-films and nanoparticles”, Ph.D. dissertation, Facolta di Ingineria.

MULTUMESC!!!!!!!!!!!!!